第 46 講　整数問題の攻め方 その２

46 次の各問いに答えよ．

(1) a，b，q，r を整数とし

$$a=bq+r,\quad b>0,\quad 0\leqq r<b$$

を満たしているとする．このとき a，b の最大公約数 G_1 と b，r の最大公約数 G_2 は等しいことを示せ．また，このことを用いて，3718 と 4914 の最大公約数を求めよ．

(2) $12x+5y=2199$ を満たす整数 x，y をすべて求めよ．

(3) 2 つの集合 $A=\{3m+5n \mid m$ と n は整数$\}$，$B=\{2k+7l \mid k$ と l は整数$\}$ について，$A=B$ であることを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　整数問題の攻め方 その 2

46　次の各問いに答えよ．

(1)　$6a+21b=2001$ を満たす整数 a，b の組の中で，a と b の差の絶対値が最小になるような a の値を求めよ．

(2)　9 で割り切れる整数全体の集合を A，15 で割り切れる整数全体の集合を B とする．$C=\{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$ とするとき，C は 3 で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ．

【選択肢】

(1)　㋐　$a=81$　　㋑　$a=53$　　㋒　$a=71$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 46 講　整数問題の攻め方 その２

46　次の各問いに答えよ.

(1)　a, b, q, r を整数とし

$$a=bq+r,\quad b>0,\quad 0\leqq r<b$$

を満たしているとする. このとき a, b の最大公約数 G_1 と b, r の最大公約数 G_2 は等しいことを示せ. また, このことを用いて, 3718 と 4914 の最大公約数を求めよ.

(2)　$12x+5y=2199$ を満たす整数 x, y をすべて求めよ.

(3)　2 つの集合 $A=\{3m+5n \mid m$ と n は整数$\}$, $B=\{2k+7l \mid k$ と l は整数$\}$ について, $A=B$ であることを示せ.

【答】　(1) 最大公約数は 26　(2) $(x,\ y)=(5k+2,\ 435-12k)$ (k は整数)　(3) 略

【解答】

(1)　a と b の最大公約数が G_1 より

$$\begin{cases} a=\alpha G_1 \\ b=\beta G_1 \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は互いに素な整数})$$

と表せる. このとき $\alpha G_1=\beta G_1 q+r$ より $r=(\alpha-\beta q)G_1$ であるので G_1 は r の約数.

また G_1 は b の約数でもあるので, G_1 は b と r の公約数. よって $G_1\leqq G_2$　……①

b と r の最大公約数が G_2 より

$$\begin{cases} b=xG_2 \\ r=yG_2 \end{cases} \quad (x,\ y \text{ は互いに素な整数})$$

と表せる. このとき $a=xG_2q+yG_2=(xq+y)G_2$ であるので G_2 は a の約数.

また G_2 は b の約数でもあるので, G_2 は a と b の公約数. よって $G_1\geqq G_2$　……②

①と②より $G_1=G_2$

また

$$4914=3718\cdot1+1196 \qquad 1196=130\cdot9+26$$

$$3718=1196\cdot3+130 \qquad 130=26\cdot5$$

より, 3718 と 4914 の最大公約数は 130 と 26 の最大公約数, つまり **26** に等しい.

(2)　与式は $12(x-2)=-5(y-435)$ と変形できる. ここで 12 と 5 は互いに素であるので, この式は整数 k を用いて $12\times5\times k=60k$ と表すことができる.

よって $12(x-2)=-5(y-435)=60k$ より $\boldsymbol{(x,\ y)=(5k+2,\ 435-12k)}$ **(k は整数)**

(3)　m, n を整数として

$$3m+5n=2(-n-2m)+7(m+n)$$

で $-n-2m$ と $m+n$ は整数より $A\subset B$　……①

また k, l を整数として

$$2k+7l=3(-k-l)+5(2l+k)$$

で $-k-l$ と $2l+k$ は整数より $A\supset B$　……②

①と②より $A=B$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第46講　整数問題の攻め方 その2

46 次の各問いに答えよ．

(1) $6a+21b=2001$ を満たす整数 a，b の組の中で，a と b の差の絶対値が最小になるような a の値を求めよ．

(2) 9で割り切れる整数全体の集合を A，15で割り切れる整数全体の集合を B とする．$C=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}$ とするとき，C は3で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ．

【選択肢】

(1) ㋐ $a=81$　㋑ $a=53$　㋒ $a=71$

【答】 (1) ㋒

【解答】

(1) 与式から

$$6a+21b=2001 \quad \cdots\cdots ①$$
$$6\cdot 330+21\cdot 1=2001 \quad \cdots\cdots ②$$

であるので，①−②より

$$6(a-330)+21(b-1)=0$$
$$6(a-330)=21(1-b)$$
$$\therefore \quad 2(a-330)=7(1-b)$$

ここで，2と7は互いに素であるので，この式は14の倍数，つまり整数 k を用いて

$$2(a-330)=7(1-b)=14k$$

とおけるので，a と b は

$$a=7k+330,\quad b=-2k+1$$

と表せる．このとき

$$a-b=(7k+330)-(-2k+1)$$
$$=9k+329$$

であるので $k=-37$ のとき $|a-b|$ は最小となる．よって

$$a=7\cdot(-37)+330=\mathbf{71}$$

(2) 3で割り切れる整数全体の集合を D とおく．$x\in C$ ならば整数 k，l を用いて

$$x=9k+15l$$

と表せるので

$$x=3(3k+5l)\in D$$

逆に $x\in D$ ならば整数 k を用いて $x=3k$ と表せるが

$$x=3k$$
$$=\{9\cdot 2+15\cdot(-1)\}k$$
$$=9\cdot 2k+15\cdot(-k)\in C$$

よって　$C=D$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。